



UNIVERSITY of OULU
OULUN YLIOPISTO

Matematiikan didaktiikka, osa II

Algebra

Sarenius

Kasvatustieteiden tiedekunta, Oulun yksikkö



Mitä on algebra?

- ▶ Algebra on aritmetiikan yleistys.
- ▶ Algebrassa siirrytään operoimaan lukujen sijaan niiden ominaisuuksilla.
- ▶ Algebrassa käytetään muuttujia kuvaamaan sanallisten tehtävien tuntemattomia.
- ▶ Algebra on yhtälöiden muodostamista ja ratkaisua.



Mitä algebra on käytännössä? (Moses, 1999)

Tuntemattomia

- ▶ Mikä luku pitää lisätä kolmeen että summa on seitsemän?
- ▶ Täytä tyhjä kohta: $3 + \underline{\quad} = 7$.
- ▶ Valitse ruutuun oikea luku, että lauseesta tulee tosi: $3 + \square = 7$.
- ▶ Mikä tulee kysymysmerkin paikalle: $3 + ? = 7$.
- ▶ Ratkaise yhtälö: $3 + x = 7$.



Mitä algebra on käytännössä?

Kaavoja

- ▶ Jos oppilasta pyydetään ratkaisemaan A lausekkeesta $A = \text{kanta} \cdot \text{korkeus}$, kun kanta ja korkeus tiedetään, puhumme algebrasta.
- ▶ Jos oppilasta pyydetään laskemaan n lausekkeesta $3 \cdot 5 = n$ kysymyksellä: "Mikä luku pitää laittaa n :n paikalle, jotta yhtälö on tosi?", kyseessä on algebra.



Mitä algebra on käytännössä?

Yleistettyjä muotoja

- ▶ Esimerkiksi: "Luvulla 19 kertominen voidaan esittää muodossa $19n = 20n - n$."
- ▶ Algebran avulla voidaan siis kirjoittaa ylös matemaattisesti aritmetiikan ominaisuuksia.



Mitä algebra on käytännössä?

Suhteita

- ▶ Pekka on kaksi vuotta Maria vanhempi. Minkä ikäisiä Pekka ja Mari voivat olla? Esitä ikä kaavan muodossa.

$$P = M + 2$$

$$P - M = 2$$

$$2 = P - M$$

$$M = P - 2$$



Miksi algebra on hankalaa?

- ▶ Algebrassa ei toimita enää esimerkein vaan yleisellä tasolla. Tästä syystä algebran oppiminen vaatii jonkin tasoista abstraktia ajattelua. Tästä syystä mallit, esimerkiksi kymmenjärjestelmävälineet, saattavat sekoittaa asiaa.
- ▶ Yhtäsuuruusmerkin muuttuu tiukasti yhtäsuuruudeksi, pois tulosta osoittavasta merkistä.
- ▶ Suuremerkintä ja algebrallinen merkintä sekoittuvat helposti (esim. 5 m tarkoittaa eri asiaa eri tilanteissa).



Miksi algebra on hankalaa?

- ▶ Opetuksessa unohdetaan konkretisointi, kumpi on parempi tehtävä?

Esimerkki 1

Ratkaise yhtälö $x + 5 = 12$.

vai

Esimerkki 2

Maijulla on 12 erilaista pöytäliinaa. Hänen pöydillään on 5 liinaa, kuinka monta liinaa on laatikossa? Kirjoita yhtälö ja ratkaise se.



Tavallisia virhetulkintoja algebrallisista lauseista

- ▶ Mitä merkintä $3a$ tarkoittaa?
 - ▶ Kaksinumeroista lukua, josta ei tiedetä ykkösten määrää.
 - ▶ $a + a + a$
 - ▶ 3 kertaa a
 - ▶ 3 aaria
- ▶ Jos merkinnässä $3a$ a korvataan luvulla 2, mitä saadaan?
 - ▶ 32, 6 vai 5?
- ▶ Mitä saadaan, jos 4 lisätään $3n$:ään?
 - ▶ $4 + 3 = 3n = 7$
 - ▶ $4 + 32 = 36$
 - ▶ $4 + 3n$



Algebrallisen ajattelun opettamisesta (Moses, 1999)

- ▶ Lukujen hajottaminen summamuotoon on ensimmäinen vaihe algebrallisen ajattelun kehittämisessä.
- ▶ Tyhjän paikan käyttäminen $5 + \underline{\quad} = 8$.
- ▶ Tyhjän paikan muuttaminen muuttujamerkiksi mahdollisimman äkkiä
 $5 + x = 8$.
- ▶ Tyhjän paikan (tai ruudun) ongelma; kuvaa alkuopetuksessa yleensä vastausta $5 + 3 = \underline{\quad}$.



Yhtälönratkaisun opettamisesta

- ▶ Yhtälön käsite, siis myös yhtäsuuruusmerkin käsite, täytyy oppia hyvin ennen algoritmista ratkaisumenetelmää. Mikä on yhtälö?
- ▶ Yhtäsuuruusmerkistä täytyy käyttää oikeaa nimitystä!
- ▶ Yhtälönratkaisualgoritmi ei ole tärkeä vielä alaluokilla. Laskut voi suorittaa vaikka päässä.
- ▶ Yhtälönratkaisun kultainen havainto: yhtäsuuruusmerkin molemmilla puolilla on yhtä paljon (Ikäheimo, 1995) .



Yhtälönratkaisun opettamisesta

- ▶ Virheitä yhtäsuuruusmerkin käytössä:
 - ▶ $8 + 3 = _ + 5$, oppilaat vastaavat, että viivan paikalle tulee 11.
 - ▶ $8 - 3 = 3 - 8$ tai $8 : 4 = 4 : 8$, väärä "symmetria"
 - ▶ "Yhtäsuuruusmerkki, eli 'on' merkki näyttää vastauksen."
 - ▶ "Yhtäsuuruusmerkki tarkoittaa, että 'suorita edellinen laskutoimitus'."
 - ▶ Yhtäsuuruusmerkkiä ei käsitetä transitiiviseksi:
 $3 + 2 = 5 + 4 = 9 + 11 = 20$. Kuinka lasku kirjoitettaisiin oikein?



Yhtälönratkaisun opettamisesta

- ▶ Hyvä havainnollistaminen on orsivaaka, joka on helppo tehdä itsekin. Vaa'an molemmille puolille voidaan lisätä tai vähentää yhtä paljon ja tasapaino (yhtäsuuruus) säilyy silti.
- ▶ Molemmat puolet voi kertoa tai jakaa samalla luvulla (ei nollalla jakamista), ja tasapaino säilyy.
- ▶ Vasta kun edelliset on esimerkiksi vaa'an kanssa täysin hallussa, on järkevää opettaa siirto- ja jakamissääntöjä.
- ▶ Vaakatehtävät hyviä yhtälöajattelun kehittämisessä. Konkreettisen laskuvaa'an käyttö auttaa.



Eräs yhtälöiden opetusmenetelmä (Ikäheimo, 1995)

1. **vaihe** Mikä on yhtälö? Kirjoita tai piirrä, mitä tiedät yhtälöistä.
2. **vaihe** Muuta yhtälöitä sanalliseen muotoon: $30 : x = 10$, "Pojat saivat yhteensä 30 euroa rahaa, jokainen sai 10 euroa, montako poikia oli?"
3. **vaihe** Muuta sanallisia tehtäviä yhtälöiksi. "20 talvirengasta vaihdettiin autoihin. Yhtään rengasta ei jäänyt yli. Kuinka moneen autoon vaihdettiin talvirenkaat?" $x \cdot 4 = 20$.
4. **vaihe** Yhtälöiden ratkaiseminen kokeilemalla ja laskutoimitusten ominaisuuksien perusteella.
5. **vaihe** Yhtälövään käyttö.



Testaa osaamisesi

1. Mikä on yhtäsuuruusmerkki? Mitä sääntöjä sen käytössä on?
2. Miksi yhtäsuuruuden käsitteen opettaminen on oleellista algebran oppimiselle?
3. Mitä eri asioita algebralla tarkoitetaan?
4. Miksi algebra on hankalaa?
5. Kuinka opettaisit yhtälön käsitteen neljäsluokkalaiselle?



Lähteet

Ikäheimo, H. (1995). *Iloa ja ymmärrystä matematiikkaan*. Helsinki: Opperi.

Moses, B. (Ed.) (1999). *Algebraic thinking, grades K-12: readings from NCTM's school-based journals and other publications*. Reston (Va.): National Council of Teachers of Mathematics